ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ
ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2008

Μαθηματικά Κατεύθυνσης

1ο ΘΕΜΑ

Έστω P(x) ένα πολυώνυμο το οποίο έχει το ρ ρίζα πολλαπλότητας κ. Δείξτε ότι το P'(x) έχει το ρ ρίζα πολλαπλότητας κ-1

2ο ΘΕΜΑ

Έστω $g:R\to R$ μια συνάρτηση με g(0)=g(1)=0 και η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:R\to R$ με την ιδιότητα

$g(x)\cdot f'(x)+f(x)=1$, για κάθε $x\in R$

Αποδείξτε ότι f(x)=1, για κάθε $x\in[0,\ 1]$

3ο ΘΕΜΑ

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to R$ με f(1)=0 και f'(1)=2008.

Αν για κάθε $x,y\in(0,+\infty)$ ισχύει $f(xy)\le xf(y)+yf(x)\quad(1)$

να βρεθεί ο τύπος της f.

4ο ΘΕΜΑ

Έστω f μια παραγωγίσιμη στο [1, 3] συνάρτηση με

$$\int_1^3 f(x)dx=2f(1)$$

Να δείξετε ότι η Cf έχει μία τουλάχιστο οριζόντια εφαπτομένη.

5ο ΘΕΜΑ

Έστω η συνάρτηση f, ορισμένη στο R που ικανοποιεί τη σχέση $f''(x)\cdot f(x)+(f'(x))^2=f(x)\cdot f'(x),\quad x\in R$

και f(0)=1, f'(0)=1/2

Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση f.

ΛΥΣΕΙΣ

ΛΥΣΗ 1ου ΘΕΜΑΤΟΣ

Επειδή το ρ είναι ρίζα του P(x) πολλαπλότητας κ, το P(x) γράφεται: $P(x)=(x-\rho)^{\kappa}\cdot Q(x)$ με $Q(\rho)\neq 0$.

Είναι $P'(x)=\kappa\cdot(x-\rho)^{\kappa-1}\cdot Q(x)+(x-\rho)^{\kappa}\cdot Q'(x)$

$(x-\rho)^{\kappa-1}\cdot\left[\kappa Q(x)+(x-\rho)\cdot Q'(x)\right]=(x-\rho)^{\kappa-1}\cdot\Pi(x)$ όπου

$\Pi(x)=\kappa\cdot Q(x)+(x-\rho)\cdot Q'(x)$ με

$\Pi(\rho)=\kappa\cdot Q(\rho)+(\rho-\rho)\cdot Q'(\rho)=\kappa\cdot Q(\rho)\neq 0$ και έτσι

$P'(x)=(x-\rho)^{\kappa-1}\cdot\Pi(x)$, με $\Pi(\rho)\neq 0$

Άρα το ρ είναι ρίζα του P'(x) πολλαπλότητας κ-1

ΛΥΣΗ 2ου ΘΕΜΑΤΟΣ

Αντικαθιστώ στην δεδομένη σχέση x=0 οπότε
$g(0)\cdot f'(0)+f(0)=1 \Leftrightarrow f(0)=1$ και για x=1 έχουμε
$g(1)\cdot f'(1)+f(1)=1 \Leftrightarrow f(1)=1$ υποθέτουμε ότι υπάρχουν $x\in(0,1)$ έτσι ώστε $f(x)\neq 1$
Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο R είναι και συνεχής στο R καθώς επίσης και στο [0,1]
Από θεώρημα μέγιστης-ελάχιστης τιμής η f θα παρουσιάζει μέγιστο και ελάχιστο στο [0,1]. Αν ξ η θέση ελάχιστου ή μέγιστου τότε $\xi\in(0,1)$ με $f(\xi)\neq 1$. Από θ. Fermat έχουμε $f'(\xi)=0$ και η αρχική σχέση για x=ξ γράφεται $g(\xi)\cdot f'(\xi)+f(\xi)=1\Leftrightarrow f(\xi)=1$ (Άτοπο)

Άρα f(x)=1 για κάθε $x\in[0,1]$.

ΛΥΣΗ 3ου ΘΕΜΑΤΟΣ

Από την (1) έχουμε ισοδύναμα $f(xy)-xf(y)-yf(x)\le 0$

θεωρούμε την συνάρτηση g με g(y)=f(xy) - xf(y) - yf(x)
Για y=1:g(1)=f(x) -xf(1) - f(x)=0 και έτσι g(y) ≤ g(1)=0
Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με

$$g'(y)=xf'(xy)-xf'(y)-f(x),\quad y\in(0,+\infty)$$

Επειδή η g παρουσιάζει ακρότατο στο εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού της g, y=1 και είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό τότε με το θ.Fermat: $g'(1)=0$

$$\Leftrightarrow xf'(x)-xf'(1)-f(x)=0\Leftrightarrow xf'(x)-f(x)=2008x$$

$$\Leftrightarrow\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=\frac{2008}{x}\Leftrightarrow\left(\frac{f(x)}{x}\right)'=(2008\ln x)'$$

Οπότε $\dfrac{f(x)}{x}=2008\ln x+c\quad(2)$

Η (2) για x=1 δίνει: $\dfrac{f(1)}{1}=2008\ln 1+c\Leftrightarrow c=0$ και έτσι

$$\frac{f(x)}{x}=2008\ln x\Leftrightarrow f(x)=2008x\ \ln x$$

ΛΥΣΗ 4ου ΘΕΜΑΤΟΣ

Έστω $F(x)=\displaystyle\int_1^x f(t)dt$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο [1,3] και ισχύει F'(x)=f(x). Εφαρμόζω για την F Θ.Μ.Τ. στο [1,3] και προκύπτει ότι υπάρχει $\xi\in(1,3)$

$$F'(\xi)=\frac{F(3)-F(1)}{3-1}\Leftrightarrow f(\xi)=\frac{\int_1^3 f(x)dx-0}{2}$$

$$\Leftrightarrow f(\xi)=\frac{\int_1^3 f(x)dx}{2}\Leftrightarrow\int_1^3 f(x)dx=2f(\xi)$$

Όμως $\displaystyle\int_1^3 f(x)dx=2f(1)$ ά-

$f(0)\cdot f'(0)=c\cdot e^0\Leftrightarrow c=1/2$

ρα $2f(\xi)=2f(1)\Leftrightarrow f(\xi)=f(1)$

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο [1,3] άρα θα είναι παραγωγίσιμη και στο [1,ξ] και ισχύει f(1)=f(ξ), οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Rolle η f'(x)=0 έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (1,ξ) οπότε η Cf έχει μία τουλάχιστον οριζόντια εφαπτομένη.

ΛΥΣΗ 5ου ΘΕΜΑΤΟΣ

$$f''(x)\cdot f(x)+[f'(x)]^2=f(x)\cdot f'(x)\Leftrightarrow$$

$$f''(x)\cdot f(x)+[f''(x)\cdot f(x)+]^2=f(x)\cdot f'(x)\Leftrightarrow$$

$$f''(x)\cdot f(x)+f'(x)\cdot f'(x)=f(x)\cdot f'(x)\Leftrightarrow$$

$$[f'(x)\cdot f(x)]'=f(x)\cdot f'(x)$$

Άρα $f(x)\cdot f'(x)=c\cdot e^x$

Για x=0: $f(0)\cdot f'(0)=c\cdot e^0\Leftrightarrow c=1/2$ οπότε $f(x)\cdot f'(x)=$

$\frac{1}{2}e^x\Leftrightarrow 2f(x)\cdot f'(x)=e^x\Leftrightarrow(f^2(x))'=(e^x)'$ άρα $f^2(x)=e^x+c_1$

Για x=0: $f^2(0)=e^0+c_1\Leftrightarrow c_1=0,$ τελικά $f^2(x)=e^x$

Όμως f συνεχής και μη μηδενιζόμενη οπότε διατηρεί πρόσημο άρα $f(x)=\sqrt{e^x}$

ΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΕΠΙΜΕΛΗΘΗΚΑΝ ΤΑ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ

Γ. ΧΑΣΙΑΚΗΣ
στον **ΠΕΙΡΑΙΑ**